Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XII Olimpiadas Regionales de Matemáticas - Secundaria
NIVEL MEDIO: 8° y 9°

MARATÓN OLÍMPICA

¡Quédate en casa y prepárate para las Olimpiadas!

Estimados entrenadores:
La "Maratón Olímpica" hace parte del material de apoyo que ofrece el Equipo de Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS, con el fin de promover la preparación de los estudiantes en la resolución de problemas olímpicos. Sugerimos que difundan este material con sus colegas y estudiantes, a través de las diferentes plataformas digitales o cualquier otro medio que ustedes consideren conveniente. Así mismo, recomendamos incentivar a sus estudiantes en la resolución de estos problemas y la socialización de sus soluciones, promoviendo la creatividad y la búsqueda de métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

Apreciado estudiante:
A continuación encontrará los problemas propuestos para la primera Maratón Olímpica. Tenga en cuenta que los problemas de la maratón para el nivel Básico están dirigidos, principalmente, a estudiantes de 6° y 7°; los de nivel Medio, a estudiantes de 8° y 9°; y los de nivel Avanzado, a estudiantes de 10° y 11°. A quienes estén iniciando su preparación, sugerimos que intenten resolver los problemas de niveles anteriores. También los invitamos a que compartan sus soluciones a trevés de las redes sociales con sus compañeros y profesores, con el fin de buscar las soluciones más creativas, sencillas e ingeniosas y si lo desean también las pueden compartir en nuestra página de facebook: Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento" - **Pólya.**

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA EL NIVEL MEDIO

1. ¿Cuál es el menor número de rectas que se deben dibujar (en el plano) para obtener 8 cuadrados?

2. Sea R un rectángulo. ¿Cuántos círculos que están en el mismo plano que R tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R?

3. En una lista se escriben los números naturales del 1 hasta el 1000. ¿Cuántas veces aparece el uno en dicha lista?

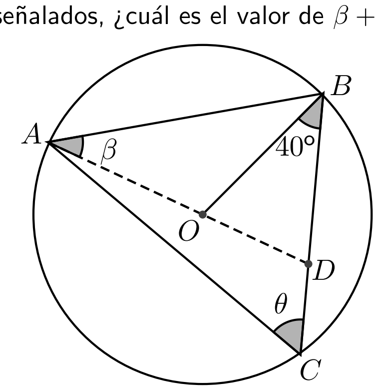
4. ¿Con cuántos ceros termina la expresión $33!$?

5. Si $p(x) = ax^2 + x + 1$ y $q(x) = x^2 + ax + 1$. Halle $a \neq 1$ tal que $p(x)$ y $q(x)$ tienen una raíz común.

6. Si n es un número formado por 9 nueves, es decir, $n = 999999999$. Halle la suma de los dígitos de n^2.

7. En una pizarra infinita se escriben en fila y en orden ascendente los números naturales (sin incluir el cero). Luego, se borran los números que son cuadrados perfectos. En esta nueva lista, ¿qué número ocupa la posición 1001?

8. En la siguiente figura el triángulo ABC tiene sus vértices sobre la circunferencia cuyo centro es O y el punto D es tal que $\measuredangle OBD = 40°$, $DB = OB$ y los puntos A, O y D son colineales. Si las letras β y θ representan las medidas de los correspondientes ángulos señalados, ¿cuál es el valor de $\beta + \theta$?



Informes:
`olimpiadas.matematicas@uis.edu.co`
Tel.: 6344000 *exts:* $1281 - 2316$; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

9. Sean a y b números reales tales que

$$a^{2018}b = 2 - \sqrt{5} \quad \text{y} \quad ab^{2018} = 2 + \sqrt{5}.$$

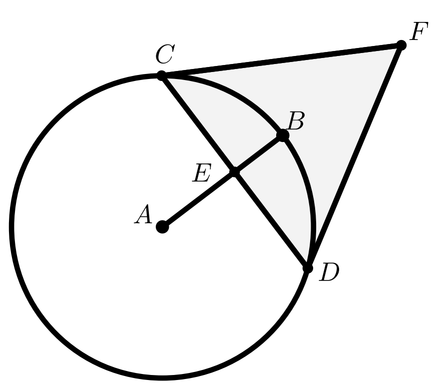
Determine el valor numérico de la siguiente expresión:

$$a^{2019}\left(\frac{b^{2019}+1}{a^{2019}-1}\right) + b^{2019}\left(\frac{a^{2019}+1}{b^{2019}-1}\right)$$

10. En una alcancía solo hay monedas de $\$500$ y $\$1.000$. Laura observa que la razón entre la cantidad de monedas de $\$500$ y monedas de $\$1.000$ es de $\frac{1}{5}$; luego incluye 20 monedas de $\$500$ y 20 monedas de $\$1.000$ y observa que la razón cambia a $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto dinero queda finalmente en la alcancía?

11. Juliana, Silvia y Milena tienen cierto número de caramelos cada una. Si se cuentan los caramelos que tienen cada dos de ellas se obtienen las siguientes cantidades: 69, 60 y 85. ¿Cuántos caramelos tienen entre las tres?

12. En la siguiente figura la circunferencia con centro en A tiene radio $5\,cm$, $BE = 2\,cm$, E es el punto medio de $\overline{CD}$ y el triángulo CDF es equilátero.



(a) Halle el perímetro del triángulo CDF.

(b) Demuestre que la prolongación del segmento $\overline{FD}$ no es tangente a la circunferencia.

13. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $4^{5003} \times 25^{5000}$?

14. Las dimensiones de una caja de base rectangular son valores enteros. Si el largo es el triple del ancho y el ancho es un cuarto del alto, ¿cuál de las siguientes opciones puede ser el volumen de la caja?

(a) $48\ u^3$ (b) $96\ u^3$ (c) $120\ u^3$ (d) $144\ u^3$

15. Dado el conjunto de números

$$N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16\}.$$

¿Cuántos subconjuntos de dos elementos cumplen que al ser extraídos del conjunto original N, el promedio de los elementos restantes en N sea 9?

16. Sean a, b y c las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10.$$

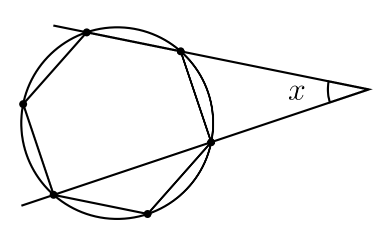
¿Cuál es el resultado de la expresión $3 \times a \times b \times c$?

17. Sean a_n y b_n, dos progresiones aritméticas, tales que $a_1 = 3$, $b_1 = 5$ y $a_{17} + b_{17} = 136$. Si la diferencia de la progresión b_n es igual a la diferencia de la progresión a_n menos 2, ¿cuál es el valor de b_{2017}?

Nota: *Una* **progresión aritmética** *es una sucesión de números tal que cada término (salvo el primero a_1) es el término anterior más un número fijo d, llamado* **diferencia**. *De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 + (n-1) \times d$.*

18. ¿Cuántos números palíndromos de seis cifras son múltiplos de 3?

19. En la siguiente figura se muestra un hexágono equilátero inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



20. Los lados de un triángulo isósceles son 13, 13 y 10. Halle el radio del círculo inscrito en este triángulo.

Nota: *El círculo inscrito está completamente dentro del triángulo y es tangente a cada uno de sus lados.*

SCAN ME

Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 *exts:* $1281 - 2316$; 6450301.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.