Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XII Olimpiadas Regionales de Matemáticas - Secundaria
NIVEL AVANZADO: 10° y 11°

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

MARATÓN OLÍMPICA

¡Quédate en casa y prepárate para las Olimpiadas!

Estimados entrenadores:
La "Maratón Olímpica" hace parte del material de apoyo que ofrece el Equipo de Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS, con el fin de promover la preparación de los estudiantes en la resolución de problemas olímpicos. Sugerimos que difundan este material con sus colegas y estudiantes, a través de las diferentes plataformas digitales o cualquier otro medio que ustedes consideren conveniente. Así mismo, recomendamos incentivar a sus estudiantes en la resolución de estos problemas y la socialización de sus soluciones, promoviendo la creatividad y la búsqueda de métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

Apreciado estudiante:
A continuación encontrará los problemas propuestos para la primera Maratón Olímpica. Tenga en cuenta que los problemas de la maratón para el nivel Básico están dirigidos, principalmente, a estudiantes de 6° y 7°; los de nivel Medio, a estudiantes de 8° y 9°; y los de nivel Avanzado, a estudiantes de 10° y 11°. A quienes estén iniciando su preparación, sugerimos que intenten resolver los problemas de niveles anteriores. También los invitamos a que compartan sus soluciones a trevés de las redes sociales con sus compañeros y profesores, con el fin de buscar las soluciones más creativas, sencillas e ingeniosas y si lo desean también las pueden compartir en nuestra página de facebook: Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento" - **Pólya.**

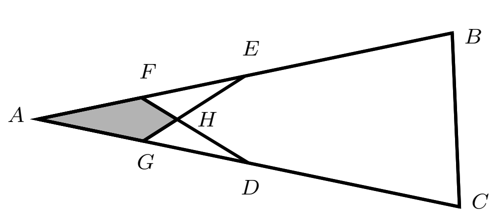
PROBLEMAS PROPUESTOS PARA EL NIVEL AVANZADO

1. La nota de la prueba clasificatoria es un elemento del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que deben presentar la prueba para que por lo menos 10 de ellos obtengan la misma nota?

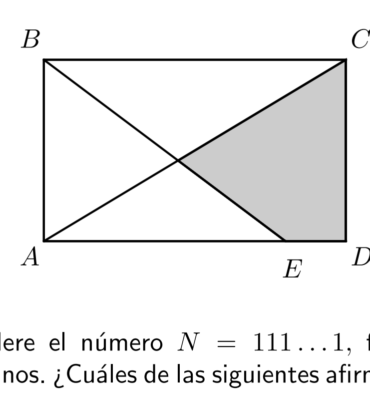
2. ¿Cuál es el residuo de dividir
$$30 + 300 + 3000 + \cdots + 3 \times 10^{2017}$$
entre 11?

3. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $1! + 2! + 3! + \cdots + 2017!$?

4. En la siguiente figura D, G, E y F son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$ respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $36\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



5. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo, $BE = BC = 5\ cm$ y $BA = 3\ cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada en cm^2?



6. Considere el número $N = 111\ldots1$, formado por 2016 unos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. N es divisible por 7.
II. N es divisible por 9.
III. N es múltiplo de 11.
IV. N es múltiplo de 6.

(a) II y IV.
(b) I, II y III.
(c) Solamente II y III.
(d) Todas son verdaderas.

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *exts:* 1281 − 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

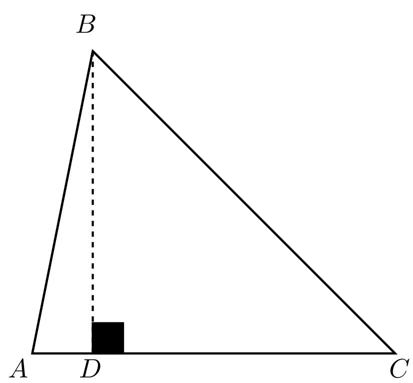
7. Sean $p(x) = ax^3 - x^2 + bx + 1$ y $q(x) = bx^3 - x^2 + ax + 1$. Halle a y b, con $a \neq b$ de tal forma que $p(x)$ y $q(x)$ tengan dos raíces comunes.

8. ¿Cuántas ternas pitagóricas están compuestas únicamente por números primos?

9. ¿Cuántos números racionales hay entre $0,1$ y $0,3$?

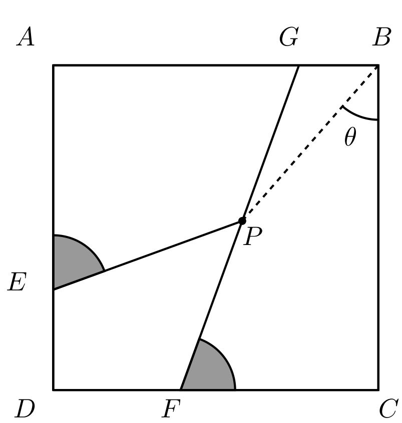
10. Sean a, b y c las raíces del polinomio x^3-5x^2+3x-8. Determine el valor de la expresión $a\times b\times c\times(a+b+c)$.

11. En la siguiente figura las medidas, en unidades de longitud $[u]$, de los tres lados del triángulo ABC son tres enteros consecutivos tales que $AB < AC < BC$ y $\overline{BD}$ es altura de este triángulo. Si a y b son las medidas (en unidades de longitud $[u]$) de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, ¿cuál es el valor de $|a - b|$?



12. Se escriben los números primos menores que 100 cada uno en una balota y se ponen las balotas en una urna. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar 3 balotas de la urna, el producto de los números escritos en las 3 balotas sea múltiplo de 10?

13. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado, P es el punto medio del segmento $\overline{FG}$ y los ángulos sombreados son congruentes. Si $EP = x$ y $FP = y$, ¿cuál es el valor de $\tan\theta$?



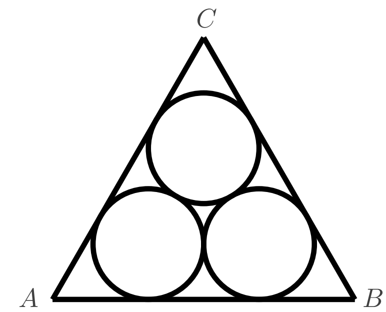
$(a)\ \dfrac{x}{y}$ $(b)\ 1-\dfrac{x}{y}$ $(c)\ \dfrac{2x}{y}$ $(d)\ 2-\dfrac{x}{y}$

14. Si f es una función tal que

$$2f(x) - f(1-x) = x^2 - 1,$$

¿cuál es la suma de las raíces de f ?

15. En la siguiente figura las 3 circunferencias tienen radio r, son tangentes entre sí y al triángulo equilátero ABC. Determine el perímetro del triángulo en función de r.



16. Se han ocultado 3 dígitos de una clave con 6 dígitos como se muestra a continuación:

$$4\ 2 * 1 * *$$

Halle la suma de las cifras del número que forma la clave, sabiendo que este número:

- deja residuo 1 al dividirse por 5,
- es divisible entre 6 y
- deja residuo 8 al dividirse por 11.

17. Dado que

$$\left(x^2+2x+1\right)^{50} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100},$$

calcule el valor de la suma

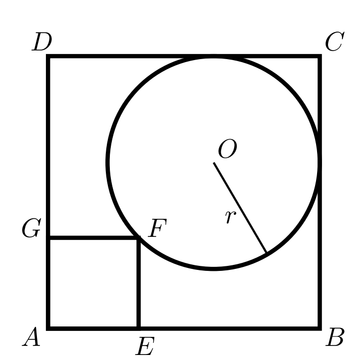
$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100}.$$

18. Sean $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ y $\sqrt[6]{n}$ términos consecutivos de una progresión geométrica. El siguiente término de la progresión es:

Nota: *Una* **progresión geométrica** *es una sucesión en la que cada término (salvo el primero a_1) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada* **razón**. *De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 \times r^{n-1}$.*

19. El problema de Erdös–Pósa. Dada una colección de $n+1$ enteros positivos distintos menores o iguales que $2n$, pruebe que siempre es posible encontrar dos enteros primos relativos de la colección (dos enteros son llamados primos relativos si su máximo común divisor es 1). Diga por qué esta afirmación puede no ser válida si la colección consiste únicamente de n enteros.

20. En la siguiente $ABCD$ y $AEFG$ son cuadrados de lado l y $\dfrac{l}{3}$ respectivamente. Si la circunferencia tiene centro en O, pasa por F y es tangente a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, halle el valor de r.



SCAN ME

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *exts:* $1281-2316$; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.